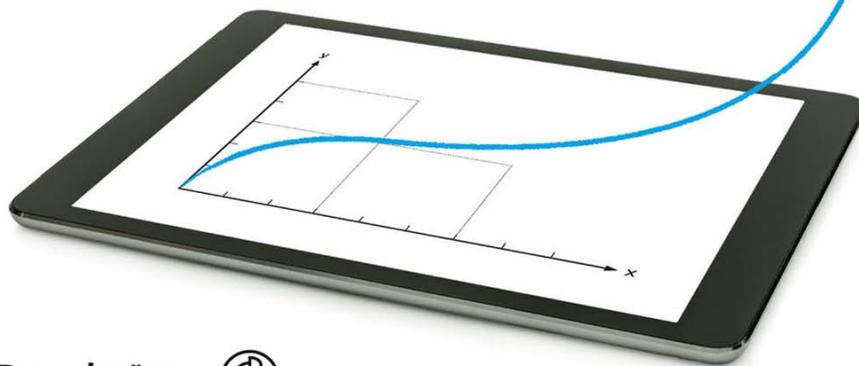


RUDOLF TASCHNER

VOM 1×1 ZUM GLÜCK

WARUM WIR MATHEMATIK
FÜR DAS LEBEN BRAUCHEN



Brandstätter 

III

MATHEMATIK FÜRS LEBEN – ZWEITER TEIL

Kraft als mathematische Größe

Alfred Payrleitner war in den 1970er Jahren, der goldenen Zeit des Fernsehens, einer der prägenden Journalisten des Österreichischen Rundfunks. Seine politischen Kommentare stachen durch Redlichkeit, exakte Recherche und geschliffene Wortwahl besonders positiv hervor. Nur einmal, bei einem kuriosen Ereignis am 23. Januar 1974, verlor er die Besonnenheit, die ihn sonst auszeichnete:

Uri Geller, damals ein berühmter junger Mann, wurde an diesem Abend eingeladen, im Fernsehen zu zeigen, wie er mit übersinnlichen Kräften, begleitet höchstens von leisem Berühren und Streicheln mit den Fingern, Löffel verbiegt und stillstehende Uhren in Gang versetzt. Vor dem Auftritt des angeblichen Wundertäters sprach Alfred Payrleitner erregt ins Mikrofon und kündigte ungewöhnlich hektisch, fast atemlos, dem Millionenpublikum vor den Bildschirmen an, dass sie nun Zeugen physikalisch unerklärbarer Phänomene werden. Für Alfred Payrleitner war es das Gleiche, ob der Wundermann unfassbare Energien oder unfassbare Kräfte sein Eigen nennt. In seiner Aufregung tauschte er die Wörter Kraft und Energie blindlings aus. Der sonst so umsichtige und disziplinierte Redakteur vergaß offenkundig völlig seine Physikstunde im Wiener Akademischen Gymnasium, als ihm dort beigebracht wurde, dass zwischen den Begriffen Kraft und Energie ein himmelhoher Unterschied besteht. Im Übrigen verlief der Abend mit Uri Geller enttäuschend: Von magischer Energie gab es keine Spur, auch nicht von okkulten Kräften.

Oft hört man den Satz, Kraft sei Masse mal Beschleunigung. Das ist zwar nicht falsch, aber eine Erklärung des Wesens von Kraft erfährt man damit nicht. Der Satz besagt nur, wie Kraft wirkt: Sie versetzt einen Körper von der Ruhe in Bewegung. Oder allgemeiner: Sie ändert dessen Geschwindigkeit. Und das umso deutlicher, je geringer die Masse des Körpers ist – jene dem Körper eigene Trägheit, die sich der Änderung einer Geschwindigkeit widersetzt. Aber was ist es, das eine Änderung der Geschwindigkeit bewirkt?

Arnold Sommerfeld betont in seinem klassischen Lehrbuch der Theoretischen Physik, dass wir letztlich nicht erklären können, was Kraft wirklich ist. Wir spüren sie bloß in unseren Muskeln. Und wir können sie messen, weil die Erde die Körper mit deren Gewicht an sich zieht. Das Gewicht ist eine Kraft, die sogenannte Schwerkraft, die proportional mit

der Masse des Körpers wächst. Darum zieht die Erde alle Körper mit der gleichen Beschleunigung an sich. Galileo Galilei beschrieb die Schwerkraft, als er Kugeln vom obersten Geschoß des Schiefen Turms zu Pisa fallen ließ: Nach jeder Sekunde sind sie, egal welche Masse sie haben, um zehn Meter pro Sekunde schneller als vorher. Sie fallen mit zunehmender Geschwindigkeit.

Dass wir im Allgemeinen nicht fallen, liegt daran, dass wir festen Boden unter unseren Füßen haben. Der feste Boden setzt unserem Gewicht eine gleich große Kraft entgegen, die uns ruhig stehen lässt. Gibt jedoch der Boden nach, oder stehen wir gar auf einer Falltür, die sich plötzlich öffnet, beginnen wir zu fallen.

Als sich Felix Baumgartner von seiner fast 40 Kilometer über der Erdoberfläche schwebenden Kapsel fallen ließ, wurde er aufgrund der Schwerkraft immer schneller: Eine Sekunde nach dem Absprung war er mit zehn Meter pro Sekunde unterwegs, zwei Sekunden nach dem Absprung mit 20 Meter pro Sekunde, drei Sekunden nach dem Absprung mit 30 Meter pro Sekunde. Aber als er die Geschwindigkeit von rund 380 Meter pro Sekunde erreichte, was umgerechnet 1368 Kilometer pro Stunde entspricht, erhöhte sich seine Fallgeschwindigkeit nicht mehr, weil sich seinem Gewicht eine gleich große Reibungskraft der Luft entgegengesetzte. Wenn sich die beiden Kräfte zu null addieren, bleibt die Geschwindigkeit konstant. Tatsächlich wurde sie daraufhin sogar kleiner, weil die Reibungskraft der Luft zunahm – schlagartig dann, als sich der Fallschirm öffnete.

In diesem Sinn verstehen wir das Gewicht als Kraft, die uns seit Bestehen der Erde begleitet. Daneben gibt es vielerlei andere Kräfte: jene chemischer Natur, wie zum Beispiel die Muskelkraft, die aus chemischen Reaktionen in den Muskelzellen entsteht. Oder die Dampfkraft, allgemein die von Wärmemaschinen oder Verbrennungsmotoren ausgehenden Kräfte. Oder die aus der Elektrizität und dem Magnetismus herrührenden Kräfte. Oder die Reibungskraft, von der wir im vorigen Absatz sprachen. Eine wesentliche Aufgabe der Physik konzentriert sich darauf, Kräfte verschiedenster Herkunft zu beschreiben und womöglich auf elementare Kräfte zurückzuführen. Aber dies führt uns vom eigentlichen Thema, der Mathematik, etwas zu weit weg.

Für uns ist interessant, wie der bedeutendste Mathematiker aller Zeiten, der um 220 v. Chr. in Syrakus wirkende Archimedes, mit seinem fulminanten mathematischen Talent verstand, Kräfte zu vergrößern und zu verkleinern. Damit schuf er die Grundlage der Technik, auf der unsere moderne Zivilisation beruht. Wir verstehen Archimedes am besten, wenn wir dem Begriff der Kraft den der Energie gegenüberstellen. Energie und Kraft sind beileibe nicht dasselbe, wie Alfred Payrleitner in seiner überschwänglichen Rede vor Uri Gellers Auftritt glauben ließ. Aber sie stehen zueinander in einer innigen Beziehung.

Der Hebel als mathematisches Gerät

Um sich dem Begriff der Energie nähern zu können, entwerfen wir das folgende Bild: Wir zeichnen den waagrechten Erdboden und wissen, dass senkrecht auf ihn gerichtet die

Schwerkraft wirkt, die den Körpern ihr Gewicht verleiht. Wir gehen dabei von folgender Annahme aus: Egal, ob sich ein Körper an einer bestimmten Stelle oberhalb der Erdoberfläche befindet oder nicht, die Schwerkraft als solche ist überall, also auch an dieser Stelle, immer vorhanden. Wir denken uns daher an jeder Stelle des Raumes oberhalb der Erdoberfläche einen Pfeil angebracht, der senkrecht nach unten weist. Natürlich kann man diese Pfeile in der Zeichnung nicht wirklich an alle Punkte anheften. Wir wählen einfach viele Punkte eines Rasters dafür aus, die stellvertretend für alle Punkte stehen. Auf diese Weise bekommen wir das Bild von vielen senkrecht nach unten gerichteten Pfeilen, die gleichsam wie Regentropfen bei Windstille herabsinken. Man sagt dazu, dass man das Kraftfeld der Schwerkraft in der Nähe der Erdoberfläche gezeichnet hat. [Siehe [Abb. 3](#), S. 47]

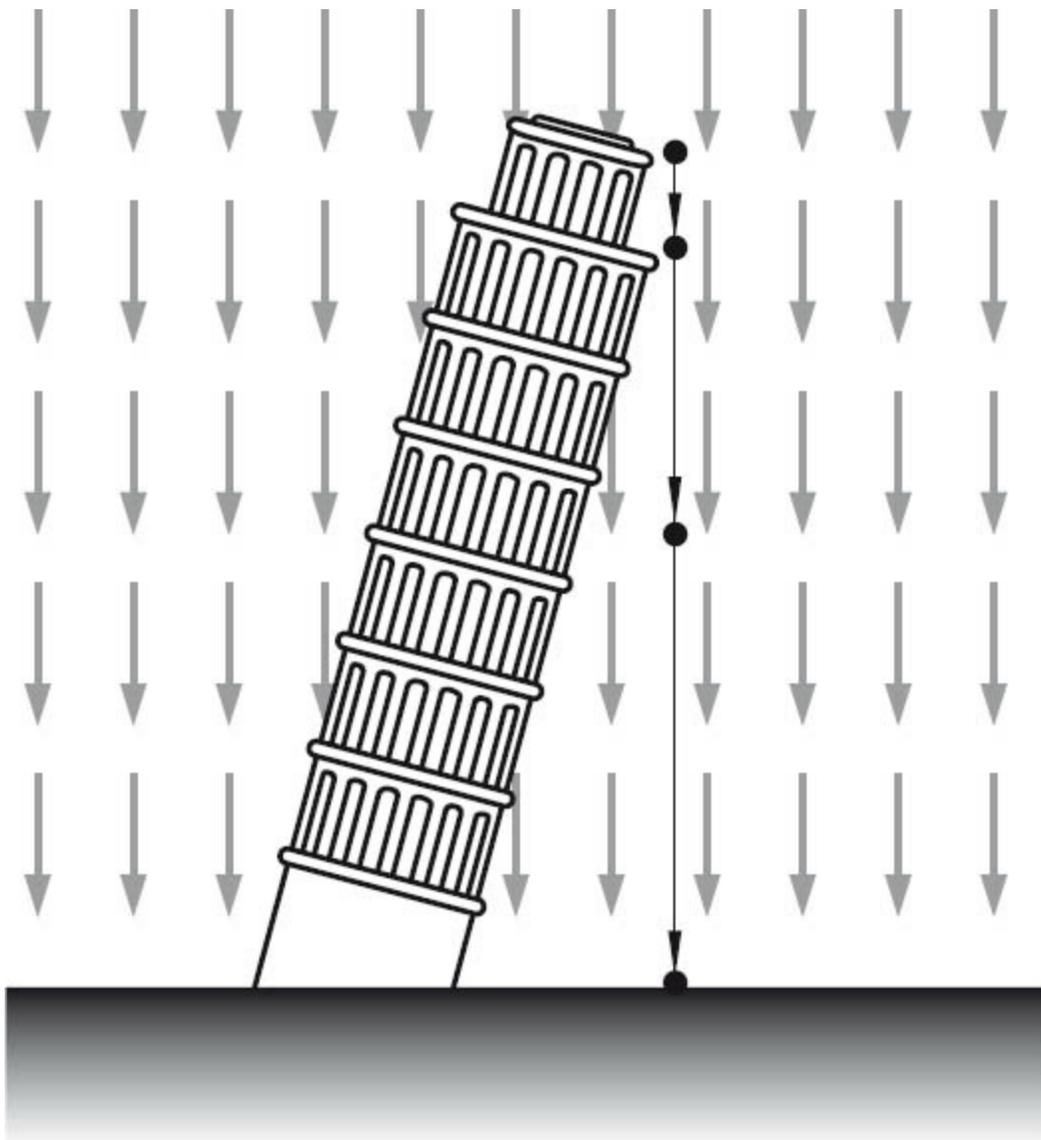


Abb. 3: Das Schwerfeld in der Nähe der Erdoberfläche. Eine vom 45 Meter hohen Turm zu Pisa herabfallende Kugel wird von ihrem Gewicht beschleunigt: In der ersten Sekunde fällt die

Kugel fünf Meter und hat am Ende der ersten Sekunde zehn Meter pro Sekunde Geschwindigkeit. In der zweiten Sekunde fällt die Kugel weitere 15 Meter und hat am Ende der zweiten Sekunde 20 Meter pro Sekunde Geschwindigkeit. In der dritten Sekunde fällt die Kugel weitere 25 Meter und hat am Ende der dritten Sekunde, knapp vor dem Aufprall, 30 Meter pro Sekunde Geschwindigkeit.

Die Vorstellung eines Kraftfeldes ist typisch mathematischer Natur. Denn man sieht es nicht, man hört es nicht, man riecht es nicht, man schmeckt es nicht. Es ist den Sinnen völlig entzogen, buchstäblich abstrakt. Das lateinische „abstrahere“ bedeutet „weg-ziehen“, nämlich weg von dem, was augenscheinlich ist. Man spürt das Kraftfeld nur dann als Gewicht an einer Stelle oberhalb der Erdoberfläche, wenn man einen Körper an diesem Ort anbringt.

Trägt Galilei Metallkugeln vom Erdboden in das oberste Geschoß des Schiefen Turms zu Pisa, verrichtet er Arbeit. Hebt sich der Ballon, an dem die Kapsel mit Felix Baumgartner als Insassen hängt, vom Erdboden weg 40 Kilometer in die Höhe, bedeutet dies Arbeit, die es zu leisten gilt. Allgemein bedeutet es Arbeit, wenn ein Körper von einer Stelle oberhalb des Erdbodens auf eine andere, höher gelegene Stelle versetzt wird. Denn man hat den Körper gegen die Pfeile des Schwerkraftfeldes bewegt. Und diese Arbeit ist einerseits umso größer, je größer der Unterschied zwischen den Abständen des Körpers von der Erdoberfläche vor und nach der Versetzung ist: Trägt Galilei die Kugel nur bis ins Mittelgeschoß des Schiefen Turms zu Pisa, leistet er nur die halbe Arbeit jener ganzen Arbeit, die mit dem Tragen bis ins oberste Geschoß verbunden ist. Andererseits ist die Arbeit umso größer, je größer die Masse des Körpers ist, der gehoben wird. Der bekannte Physiker Werner Gruber, der zur Zeit von Felix Baumgartners Ausflug in die Stratosphäre doppelt so viel Masse auf die Waage brachte wie der Fallschirmspringer, hätte vom Ballon doppelt so viel Arbeit abverlangt, ihn in die Höhe von 40 Kilometer zu befördern.

Das Gewicht eines Körpers multipliziert mit seiner Höhe, also seinem senkrechten Abstand von der Erdoberfläche: Dies ist die Energie, die man dem Körper im Schwerfeld der Erde zuschreibt. Hebt man den Körper, vergrößert sich dessen Energie um die Arbeit, die man beim Heben leistet. Ist der Körper von einer hohen Position in eine niedrigere herabgesunken, hat er zugleich an Energie verloren.

Das Wesentliche an der Energie ist: Sie gibt es nicht zum Nulltarif. Gewinnt ein Körper Energie, muss sie von irgendwoher stammen und in den Körper investiert werden. Um zum Beispiel einen Körper zu heben, muss man dies mit Muskeln leisten, also entsprechend viel chemische Energie aufbringen, oder mit einem Elektromotor die Seilwinden ziehen, also entsprechend viel elektrische Energie aufwenden, oder ihn mit Dampfkraft heben, also mit thermischer Energie – wie auch immer. Die Energiebilanz jedenfalls muss stimmen. Darum nennt man in der Physik die Energie eine Erhaltungsgröße.

Es spricht für das prägnante Denken des Archimedes, dass er sich bei all den verschiedenen Energieformen, die es gibt, allein auf jene versteifte, die er wirklich vollkommen verstand: Es ist die oben beschriebene, vom Feld der Schwerkraft herrührende Energie. Sie ist der Mathematik am leichtesten zugänglich – auch deshalb, weil sie sich so

einfach beschreiben lässt: Man muss nur das Gewicht des Körpers mit der Höhe multiplizieren, die er von der Erdoberfläche senkrecht entfernt ist. Trotzdem kann man damit Apparate bauen, die nützlich sind.

Das erste Basisgerät, dem sich Archimedes widmete, war der Hebel. Es handelt sich bei ihm um eine starre Stange, deren Masse im Folgenden keine Rolle spielen soll und die an einem festen Punkt drehbar angebracht ist. Von dieser Achse des waagrecht gehaltenen Hebels aus erstreckt sich nach links, sagen wir zehn Zentimeter, der kurze Teil der Stange, der sogenannte Lastarm, an dessen linkem Ende ein Körper mit großer Masse aufgehängt wird. Von der Achse nach rechts erstreckt sich der lange Teil der Stange, der sogenannte Kraftarm – in unserem Beispiel ist er einen Meter lang. An dessen rechtem Ende wird ein Körper mit kleiner Masse aufgehängt, wobei diese so austariert ist, dass sich der Hebel im Gleichgewicht befindet, sich also nicht bewegt. Was bedeutet das?

Nehmen wir an, der Hebel gerät um einen Hauch aus der Waagrechten: Der Lastarm senkt sich um einen Millimeter nach unten. Dann hebt sich entsprechend der Kraftarm, der ja zehnmal länger als der Lastarm ist, um zehn Millimeter, also um einen Zentimeter in die Höhe. Würde der Lastarm um zwei Zentimeter in die Tiefe sinken, würde sich der Kraftarm um 20 Zentimeter heben. Durch das Senken des linken Hebelarmes verliert die an seinem Ende angebrachte Last an Energie. Die gleiche Energie muss der Körper am Ende des Kraftarms gewinnen. Er wird zehnmal so hoch gehoben, wie die Last in die Tiefe sinkt. Dementsprechend darf das Gewicht am Kraftarm nur ein Zehntes des Gewichts der Last betragen. [Siehe [Abb. 4](#)]

Genauso ist es, wenn der Kraftarm des Hebels doppelt so lang wie dessen Lastarm ist: Dann wird die am Ende des Lastarms aufgehängte Last durch ein halb so schweres Gewicht am Kraftarm austariert. Und wenn der Kraftarm des Hebels hundertmal länger als der Lastarm ist, kann man mit einer Masse von zehn Kilogramm eine Tonne balancieren – und mit geringfügig mehr als zehn Kilogramm Masse die Tonne sogar heben. Natürlich muss die Achse des Hebels der Belastung standhalten. Darum sagte Archimedes: „Man gebe mir einen festen Punkt, und ich kann die Erde aus ihren Angeln heben.“