LERNEN EINFACH GEMACHT

2. Auflage

Differenzial-gleichungen

für dummies®

Differenzialgleichungen richtig klassifizieren

Verschiedene Zugänge zur Lösung kennen

Fertigkeiten zum Lösen erwerben

Steven Holzner
Timm Sigg

$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Tabelle 1.1: Ableitungen der elementaren Funktionen

Die Ableitungen in den letzten vier Zeilen kann man auswendig lernen oder immer neben sich legen, aber die Ableitung von x^n müssen Sie sich etwas genauer anschauen. Sie gilt nämlich für alle reellen Zahlen n und nicht nur für die natürlichen Zahlen.

Ja, sie gilt sogar für $n = 0$:

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$$

Es folgen drei weitere Beispiele mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad.

Erstes Beispiel:

Leiten Sie die Funktion $f(x) = x^5$ab.

$n = 5$. Also folgt

$$f'(x) = nx^{n-1} = 5x^{5-1} = 5x^4.$$

Zweites Beispiel:

Leiten Sie die Funktion $f(x) = -$ab.

$n = -1$, denn $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Also folgt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} = -1 \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Drittes Beispiel:

Leiten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ab.

$n = \frac{1}{2}$, denn $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Also folgt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wie Sie sehen, schlagen Sie, wenn x unter der Wurzel oder im Nenner steht, schematisch den folgenden Weg ein:

1. **Sie ersetzen die Wurzel- beziehungsweise Bruchschreibweise durch die Potenzschreibweise. Sie schreiben also beispielsweise statt**

$\sqrt[3]{x^5}$ den Ausdruck $x^{\frac{5}{3}}$

beziehungsweise statt

$\frac{1}{x^3}$ den Ausdruck x^{-3}.

2. **Sie leiten diesen Ausdruck (in Potenzschreibweise) ab.**

   Die Regel lautet

   $$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$

   Sie erhalten also beispielsweise

   $$\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

   beziehungsweise

   $$-3x^{-4}.$$

3. **Sie überführen den erhaltenen Ausdruck wieder in die ursprüngliche Wurzel- oder Bruchschreibweise.**

   Sie erhalten also

   $$\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

   beziehungsweise

   $$-\frac{3}{x^4}.$$

Ableitungsregeln

Für alle anderen als die elementaren Funktionen gibt es Regeln. Es sind im Ganzen fünf, zwei sehr leichte, zwei leichte und eine mittelschwere. Ich beginne mit den sehr leichten Regeln:

Summen- und Faktorregel

Die Summen- und die Faktorregel sind so intuitiv, dass Sie sie auch ohne ihre Kenntnis richtig anwenden würden. Davon bin ich überzeugt.

Oder was vermuten Sie für die Ableitung der Funktion $f_1(x) = \sin x + x^2$ oder die Ableitung der Funktion $f_2(x) = 3\cos x$?

Richtig, $f_1'(x) = \cos x + 2x$ und $f_2'(x) = -3\sin x$.

Da aber Sicherheit vorgeht, packe ich Ihr neues Wissen in zwei Regeln und die beiden Regeln zusammen in einen Merkblock:

- **Summenregel:**
  Die Ableitung von $f(x)+g(x)$ ist $f'(x)+g'(x)$.
- **Faktorregel:**
  Die Ableitung von $C \cdot f(x)$ ist $C \cdot f'(x)$.

Gelernt ist halt gelernt!

Produktregel

Anders als bei der Faktorregel sieht es bei der Produktregel aus. Da wird auch etwas multipliziert und dann abgeleitet, aber im Unterschied zur Faktorregel betrachten Sie nun das Produkt zweier Funktionen $(u(x) \text{ und } v(x))$, die beide von x abhängen. Im Unterschied zur Faktorregel haben Sie dann also nicht das Produkt einer reellen Zahl C mit einer Funktion $f(x)$ vorliegen.

Als Beispiel taugt die Funktion $f(x)=x \cdot e^x$.

Hierfür kennen Sie noch keine Regel. Ja, noch nicht. Aber hier ist sie auch schon, die *Produktregel*.

Die Ableitung des Produkts zweier Funktionen $u(x) \cdot v(x)$ berechnet sich nach der *Produktregel*. Sie lautet

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Oder hier die (mir sympathischere) Kurzversion, in der Sie u und v statt $u(x)$ und $v(x)$ schreiben:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Ein Beispiel zur Anwendung der Produktregel:

Zurück zur Funktion $f(x)=x \cdot e^x$.

Wählen Sie $u(x)=x$ und $v(x)=e^x$.

Dann ist $u'(x)=1$ (denn $n=1$) und $v'(x)=e^x$.

Folglich gilt für die Ableitung von $f(x)=x \cdot e^x$:

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x \, .$$

Nur zur Übung natürlich leiten Sie die erhaltene Funktion gleich noch einmal ab:

Ihr neues $u(x)$ ist nun: $u(x) = 1 + x$; Ihr neues $v(x)$ bleibt: $v(x) = e^x$.

Also lauten die Ableitungen: $u'(x) = 0 + 1 = 1$ und $v'(x) = e^x$.

Prima, somit erhalten Sie für die zweite Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$:

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (1 + x) \cdot e^x = (2 + x) \cdot e^x.$$

Also, ich weiß ja nicht, wie es Ihnen damit geht, aber ich könnte Gefallen daran finden.

Wenn Sie übrigens drei Funktionen miteinander multiplizieren, also zum Beispiel die drei Funktionen $u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$, so erhalten Sie die Ableitung davon mit der *erweiterten Produktregel*:

$$(u(x) \cdot v(x) \cdot w(x))' = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

beziehungsweise in der Kurzform:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Jede der drei Funktionen wird also je einmal abgeleitet; das ist nur gerecht.

Sind es noch mehr Funktionen, so bleibt es gerecht. Hier noch das Beispiel mit n Funktionen anhand der *verallgemeinerten Produktregel*:

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot n_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot \ldots \cdot u_n + \cdots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'.$$

Wer weiß, vielleicht brauchen Sie's ja mal!

Quotientenregel

Ein bisschen umständlicher, aber kein bisschen schwieriger, funktioniert das Ableiten, wenn Sie einen Quotienten zweier Funktionen vor sich haben:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Die Ableitung berechnen Sie mit der sogenannten *Quotientenregel*:

Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen $\frac{u(x)}{v(x)}$ berechnet sich nach der *Quotientenregel*. Diese lautet:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

oder in Kurzform mit u und v statt $u(x)$ und $v(x)$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Das üben Sie natürlich auch.

Und zwar am Beispiel:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Wählen Sie $u(x) = \sin x$ und $v(x) = \cos x$.

Dann ist $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = -\sin x$.

Folglich gilt für die Ableitung von $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf zwei verschiedene Arten verschönern:

- Entweder Sie machen vom berühmtesten aller Sinus-Kosinus-Regeln $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Gebrauch und erhalten

  $$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- Oder Sie verwenden die Beziehungen

  $$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

  und

  $$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

  und erhalten:

  $$f'(x) = 1 + \tan^2 x,$$

  was natürlich das Gleiche sein muss.